biblioconstruction.com

CHAPITRE 3

Méthode des forces

biblioconstruction.com

3.1. Méthode des forces

La méthode des forces s'applique aux structures hyperstatiques lorsque les liaisons sont rigides et parfaites. Elle est basée sur le choix d'un système de base qui permet d'identifier les réactions surabondantes et aussi le principe de superposition du système isostatique simple avec les charges réelles et des systèmes virtuels avec une charge unitaire.

3.2. Principe de la méthode des forces

Le principe de cette méthode consiste à remplacer la structure hyperstatique en une structure isostatique équivalente c'est-à-dire que les liaisons surabondantes sont remplacées par des réactions inconnues qu'il faut calculer.

Pour la même structure il y a plusieurs choix du système de base (Exemple, Figure 3.1).

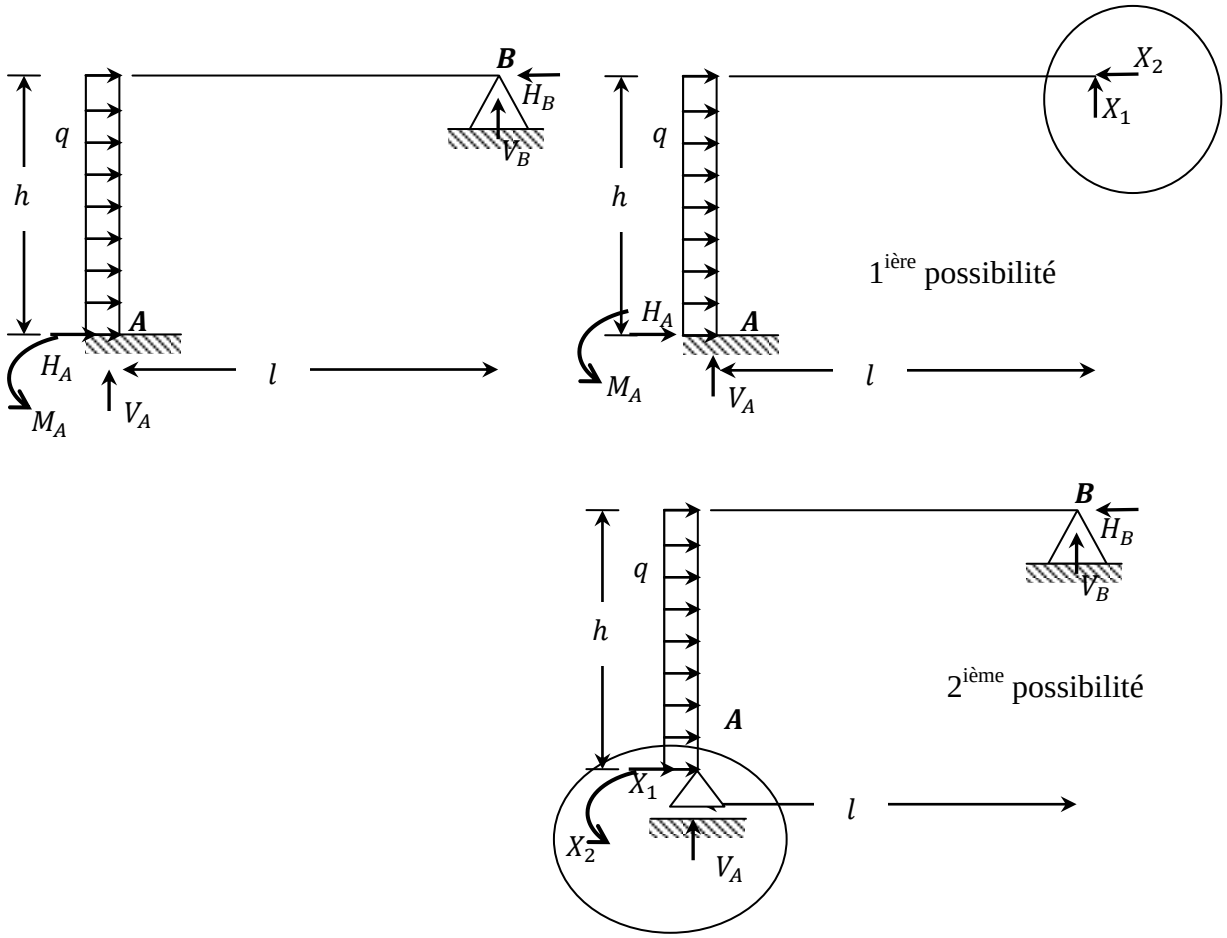


Figure 3.1. : La structure initiale est transformée en une structure isostatique équivalente soumise aux charges extérieures et aux réactions choisies (les inconnues X_1 et X_2).

Le système isostatique obtenu par suppression des liaisons surabondantes est désigné par :

- Système de base,
- Système fondamental,
- Système principal.

La structure isostatique équivalente est soumise à deux catégories de forces :

- Forces extérieures de départ (les charges réparties, concentrées, …).
- Réactions introduites (les inconnues hyperstatiques).

3.3. Degré d'hyperstaticité :

Le degré d'hyperstaticité d représente le nombre d'équations supplémentaires qu'il faut pour calculer toutes les réactions du système.

On peut calculer d à l'aide de la formule des contours :

$$d = 3c - a - 2s \tag{3.1}$$

3.4. Système de base :

Le système de base est le système isostatique obtenu par suppression des liaisons surabondantes dont les actions sont remplacées par des forces inconnues. D'une façon générale, pour une structure hyperstatique donnée, on peut choisir plusieurs systèmes isostatiques de base.

3.5. Différentes possibilités des systèmes de base

Différentes possibilités de systèmes de bases d'une même structure plane hyperstatique (Figure 3.2.) sont présentées.

$$d = 3c - 1a - 2s = 3.2 - 1.2 - 2.0 = 4$$

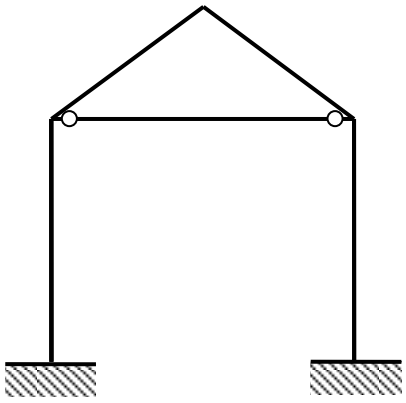


Figure 3.2. : Exemple de structure hyperstatique

1ière possibilité :

- En effet, on peut rendre isostatique la structure de la Figure suivante en libérant totalement l'encastrement au pied du poteau gauche et en sectionnant le tirant (élément entre les 2 rotules) ; les inconnues hyperstatiques sont alors : le moment d'encastrement X_1, les réactions respectivement verticale X_2 et horizontale x_3 au pied du poteau gauche et l'effort normal X_4 dans le tirant.

biblioconstruction.com

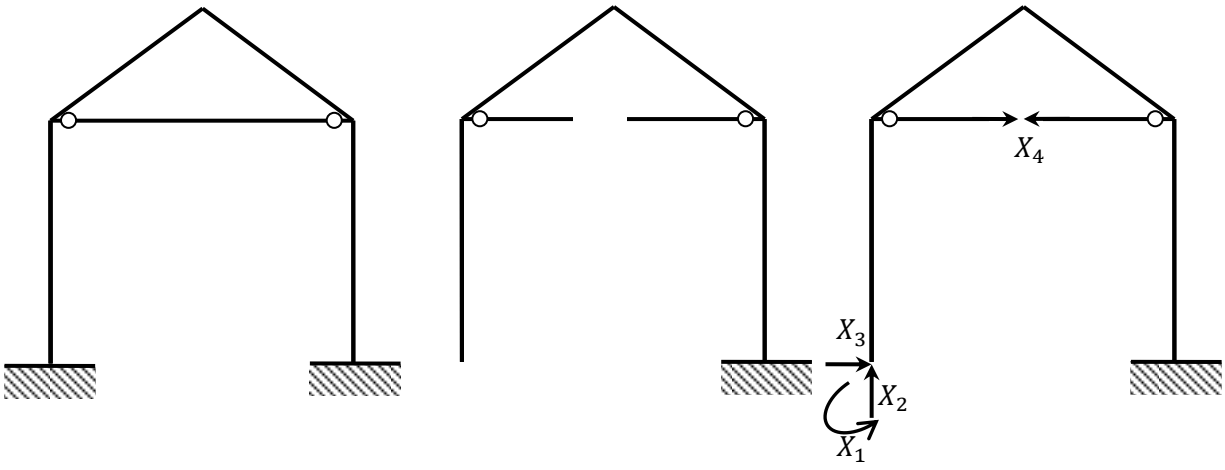


Figure 3.2.a : Type poutre sur appuis simple

2ième possibilité :

- Une deuxième manière est de libérer la rotation et la translation horizontale au niveau de l'encastrement gauche (X_1 (moment) et X_3(réaction)), aussi de libérer la rotation au niveau de l'encastrement de droite X_2 (moment) et enfin de sectionner le tirant pour faire apparaitre l'inconnu X_4 (l'effort normal).

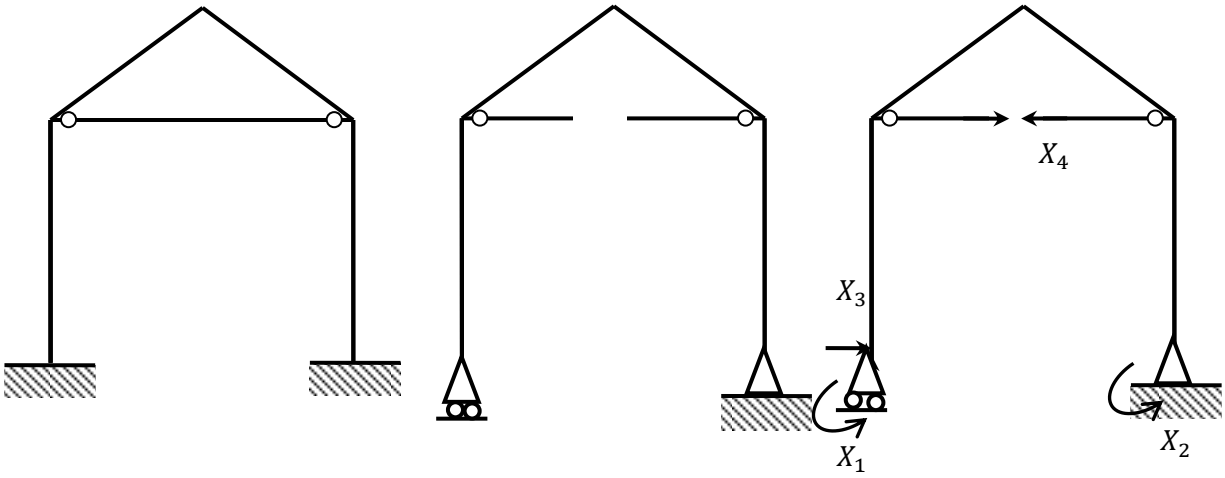


Figure 3.2.b : Type poutre cantilever

3ième possibilité :

- On pourrait aussi choisir les inconnues $X_1, X_2\ et\ X_3$ respectivement le moment interne, l'effort normal et l'effort tranchant de l'élément indiqué sur la figure ci-dessous et toujours en gardant X_4 comme inconnu (l'effort normal de tirant) (Figure 3.2.c).

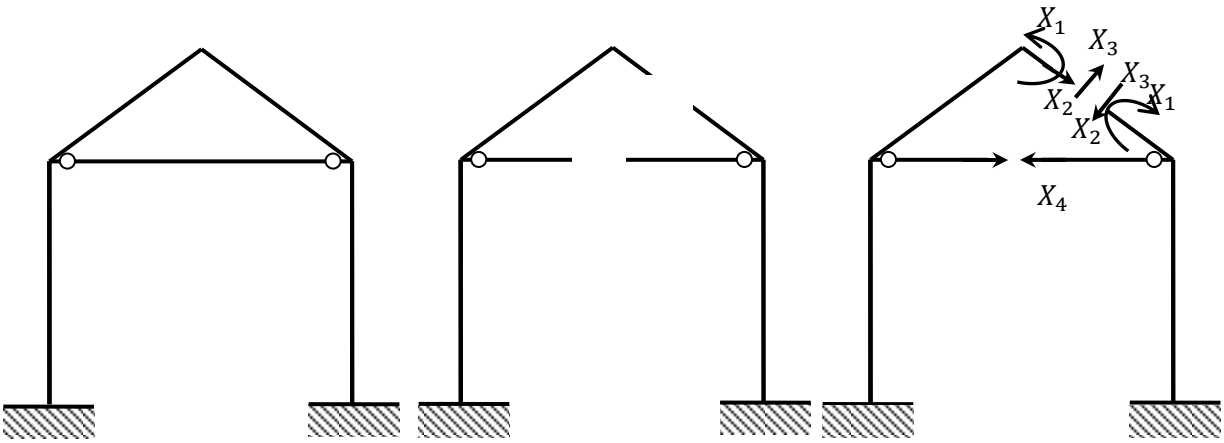
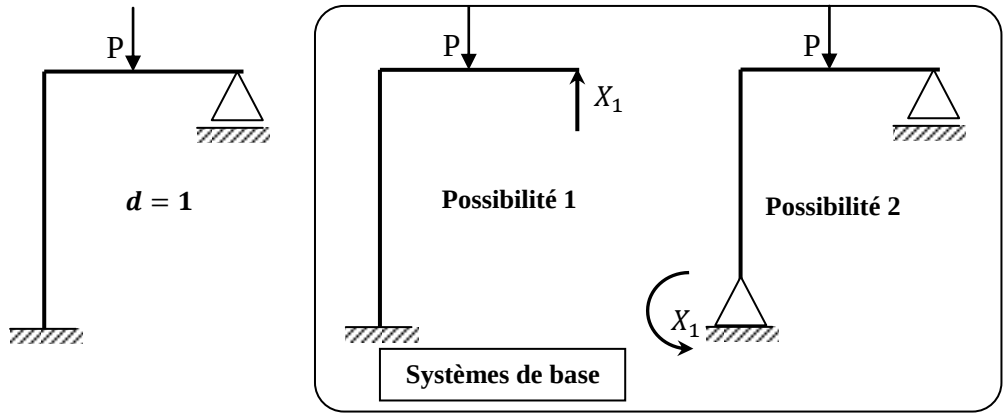


Figure 3.2.c : Type double poutre cantilever

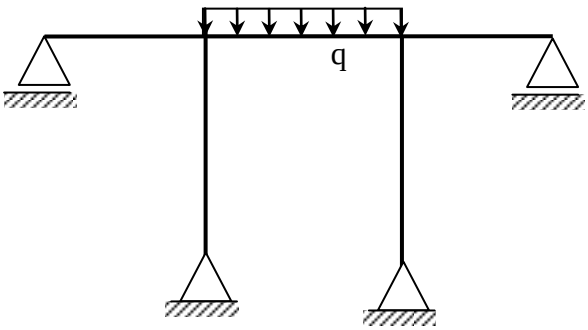
3.6. Exemples :

Calculer le degré d'hyperstaticité et représenter les différents systèmes de base :

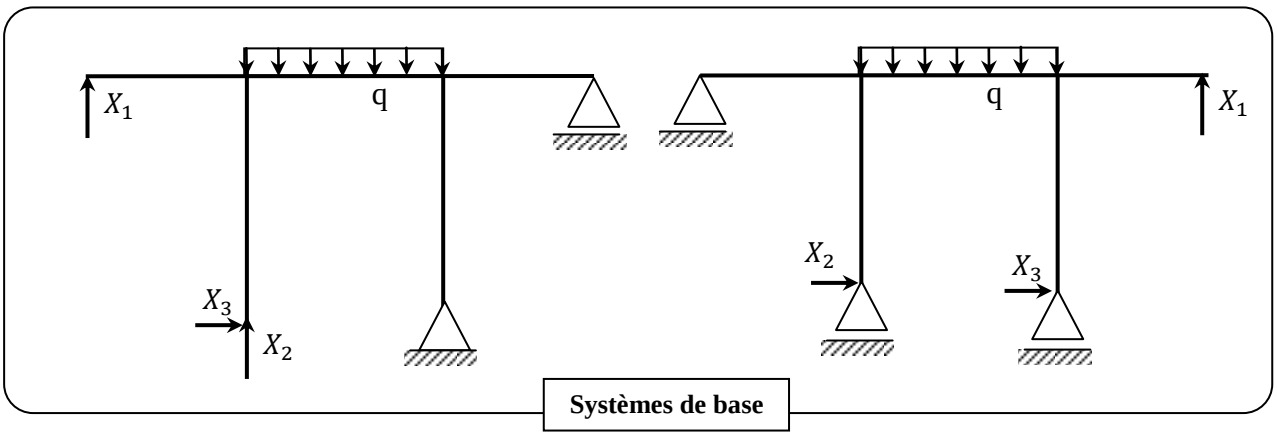
a)



b)



$$d = 3c - a - 2s = 3 * 3 - 2 - 2 * 2 = 3$$



3.7. Equations canoniques :

Dans le paragraphe précédent nous avons noté que pour une structure hyperstatique, il faut utiliser en plus des trois équations d'équilibre, des équations supplémentaires. Dans la méthode des forces, ces équations sont connues sous le nom des équations "canoniques" de la méthode des forces.

Le système d'équations canoniques aux inconnues hyperstatiques constitue l'élément de base de la méthode des forces. Il permet de calculer les inconnues $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$.

Etant donné une structure n fois hyperstatique, soumis à des forces extérieures. Les équations canoniques de la méthode des forces s'écrivent sous la forme matricielle :

$$[\delta_{ij}]\{X_i\} + [\delta_{i0}] = 0 \quad i = 1, .., n \; et \; j = 1, \dots, n \tag{3.2}$$

Ou sous forme la forme analytique suivante :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}^{u}X_2 + \cdots + \delta_{2n}X_n + \delta_{20} = 0 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Chacune de ces équations exprime la condition selon laquelle dans un système hyperstatique, le déplacement généralisé correspondant à chacune des forces généralisées superflues inconnues X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ est égal à zéro.

- $[\delta_{ij}]$: matrice des coefficients de flexibilité.
- δ_{ij} : représente le coefficient de flexibilité c'est le déplacement produit dans la section (i) selon la direction de la force X_i causée par une force $X_j = 1$.

- δ_{i0} : représente le déplacement produit dans la section (i) du système de base sous l'effet des charges appliquées (charges extérieures).

- Pour la détermination des déplacements généralisés, nous devons utiliser des intégrales de Mohr (voir § suivant) ou Veretchaguine (méthode graphique).

3.8. Evaluation des intégrales du type $\int_0^l m_i m_j dx$ par l'emploi de tableaux.

En pratique, lorsqu'on analyse des poutres essentiellement fléchies, on néglige habituellement les déformations dues à l'effort tranchant et à l'effort normal sauf pour certaines constructions particulières (arcs par exemple). Toutefois, il importera de ne pas négliger les déformations dues à l'effort normal dans les barres de type treillis (tendeurs, suspentes, tirants ...) que l'on trouve fréquemment incorporés dans des assemblages de poutres. Hormis ces quelques cas particuliers, l'évaluation des coefficients δ_{ij} reposera sur les formules :

$$\begin{cases} \delta_{ij} = \delta_{ji} = \dfrac{1}{EI}\displaystyle\int_0^l m_j m_i dx \\ \delta_{i0} = \dfrac{1}{EI}\displaystyle\int_0^l M_0 m_i dx \\ \delta_{ii} = \dfrac{1}{EI}\displaystyle\int_0^l m_i m_i dx \end{cases} \tag{3.4}$$

Notant que les expressions des moments m_i et m_j sont toujours linaires sauf pour les expressions de M_0. Nous pouvons calculer les coefficients de flexibilité δ_{ij} à l'aide des expressions analytiques données ci-dessous, aussi par la méthode graphique de veretchaguine.
Les tableaux présentés ci-dessous permettre d'évaluer ces intégrales pour certaines cas de charges extérieures.

Tableau 3.1. : Valeur de $\frac{1}{l}\int_0^l M_i m_j dx$

Remarque : Ne pas oublier de multiplier les résultats par $\frac{l}{EI}$

Introduire M et m avec leur SIGNE	m m	mg md	mg md	mg md mg = −md
M M	M.m	1/2 M(mg+md)	1/2 M(mg+md)	0
Mg Md	1/2 m(Mg+Md)	1/6(2Mgmg+Mgmd +Mdmg+2Mdmd)	1/6(2Mgmg+Mgmd +Mdmg+2Mdmd)	1/6 mg(Mg−Md)
Mg Md	1/2 m(Mg+Md)	1/6(2Mgmg+Mgmd +Mdmg+2Mdmd)	1/6(2Mgmg+Mgmd +Mdmg+2Mdmd)	1/6 mg(Mg−Md)
Mg Md Mg = −Md	0	1/6 Mg(mg−md)	1/6 Mg(mg−md)	1/3 Mgmg
Mg	1/2 Mgm	1/6 Mg(2mg+md)	1/6 Mg(2mg+md)	1/6 Mgmg
Md	1/2 Mdm	1/6 Md(mg+2md)	1/6 Md(mg+2md)	−1/6 Mdmg
a M b $\alpha = a/l$ $\beta = b/l$ α et β sont des rapports	1/2 Mm	1/6 M[mg(1+β) +md(1+α)]	1/6 M[mg(1+β) +md(1+α)]	1/6 Mmg(1−2α)
M	1/2 Mm	1/4 M(mg+md)	1/4 M(mg+md)	0
Mg	1/3 Mgm	1/12 Mg(3mg+md)	1/12 Mg(3mg+md)	1/6 Mgmg
Md	1/3 Mdm	1/12 Md(mg+3md)	1/12 Md(mg+3md)	1/6 Mdmd
M	2/3 Mm	1/3 M(mg+md)	1/3 M(mg+md)	0
Mg	2/3 Mgm	1/12 Mg(5mg+3md)		1/6 Mgmg
Md	2/3 Mdm	1/12 Md(3mg+5md)		−1/6 Mdmg

biblioconstruction.com

Tableau 3.1. (suite): *Valeur de* $\frac{1}{l}\int_0^l M_i m_j dx$

Remarque : Ne pas oublier de multiplier les résultats par $\frac{l}{EI}$

Introduire M et m avec leur SIGNE	mg	md	m (α et β sont des rapports)	m
M M	1/2 Mmg	1/2 Mmd	1/2 Mm	1/2 Mm
Mg Md	1/6 mg(2Mg+Md)	1/6 md(Mg+2Md)	1/6 m[Mg(1+β) +Md((1+α)]	1/4 m(Mg+Md)
Mg Md	1/6 mg(2Mg+Md)	1/6 md(Mg+2Md)	1/6 m[Mg(1+β) +Md((1+α)]	1/4 m(Mg+Md)
Mg Md Mg = −Md	1/6 Mgmg	−1/6 Mgmd	1/6 Mgm(1−2α)	0
Mg	1/3 Mgmg	1/6 Mgmd	1/6 Mgm(1+β)	1/4 Mgm
Md	1/6 Mdmg	1/3 Mdmd	1/6 Mdm(1+α)	1/4 Mdm
a b M α = a/l β = b/l α et β sont des rapports	1/6 Mmg(1+β)	1/6 Mmd(1+α)	1/3 Mm	1/12 Mm(3−4α²)/β valable pour α<β
M	1/4 Mmg	1/4 Mmd	1/12 Mm(3−4α²)/β valable pour α<β	1/3 Mm
Mg	1/4 Mgmg	1/12 Mdmd	1/12 Mdm(1+β+β²)	7/48 Mgm
Md	1/12 Mdmg	1/4 Mdmd	1/12 Mdm(1+α+α²)	7/48 Mdm
M	1/3 Mmg	1/3 Mmd	1/3 Mm(1+αβ)	5/12 Mm
Mg	5/12 Mgmg	1/4 Mgmd	1/12 Mgm(5−α−α²)	17/48 Mgm
Md	1/4 Mdm	5/12 Mdmd	1/12 Mdm(5−β−β²)	17/12 Mdm

Tableau 3.1. (suite) : *Valeur de* $\frac{1}{l}\int_0^l M_i m_j dx$

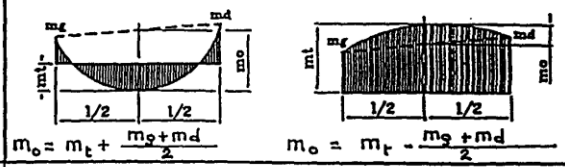
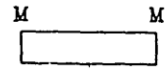
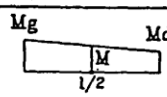
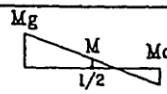
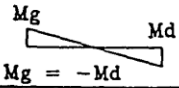
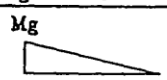
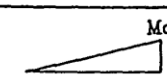
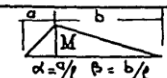
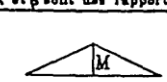
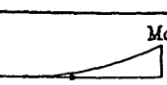
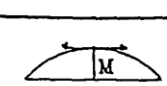
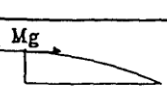
Remarque : Ne pas oublier de multiplier les résultats par $\frac{l}{EI}$

Introduire M et m avec leur SIGNE	mg	md	m	mg	md
M M	1/3 Mmg	1/3 Mmd	2/3 Mm	2/3 Mmg	2/3 Mmd
Mg Md	1/12 mg(3Mg+Md)	1/12 md(3Md+Mg)	1/3 m(Mg+Md)	1/12 mg(5Mg+3Md)	1/12 md(3Mg+5Md)
Mg Md	1/12 mg(3Mg+Md)	1/12 md(3Md+Mg)	1/3 m(Mg+Md)	1/12 mg(5Mg+3Md)	1/12 md(3Mg+5Md)
Mg Md Mg = −Md	1/6 Mgmg	1/6 Mdmd	0	1/6 Mgmg	1/6 Mdmd
Mg	1/4 Mgmg	1/12 Mgmd	1/3 Mgm	5/12 Mgmg	1/4 Mgmd
Md	1/12 Mdmg	1/4 Mdmd	1/3 Mdm	1/4 Mdmg	5/12 Mdmd
a b M $\alpha = a/\ell$ $\beta = b/\ell$ α et β sont des rapports	1/12 Mmg(1+β+β²)	1/12 Mmd(1+α+α²)	1/3 Mm(1+αβ)	1/12 Mmg(5−α−α²)	1/12 Mmd(5−β−β²)
M	7/48 Mmg	7/48 Mmd	5/12 Mm	17/48 Mmg	17/48 Mmd
Mg	1/5 Mgm	1/30 Mgmd	1/5 Mgm	3/10 Mgmg	2/15 Mgmd
Md	1/30 Mdmg	1/5 Mdmd	1/5 Mdm	2/15 Mdmg	3/10 Mdmd
M	1/5 Mmg	1/5 Mmd	8/15 Mm	7/15 Mmg	7/15 Mmd
Mg	3/10 Mgm	2/15 Mgmd	7/15 Mgm	8/15 Mgmg	11/30 Mgmd
	2/15 Mdmg	3/10 Mdmd	7/15 Mdm	11/30 Mdmg	8/15 Mdmd

biblioconstruction.com

Tableau 3.1. (suite) : *Valeur de* $\frac{1}{l}\int_0^l M_i m_j dx$

Remarque : Ne pas oublier de multiplier les résultats par $\frac{l}{EI}$

Introduire M et m avec leur SIGNE	$\frac{1}{l}\int M^2.dx$	
	M^2	1/6 M(mg+4mt+md)
	$1/3(M_g^2+M_gM_d+M_d^2)$	1/6 (Mgmg+4Mmt+Mdmd)
	$1/3(M_g^2+M_gM_d+M_d^2)$	1/6 (Mgmg+4Mmt+Mdmd)
	$1/3\ M_g^2$	1/6 Mg(mg−md)
	$1/3\ M_g^2$	1/6 Mg(mg+2mt)
	$1/3\ M_d^2$	1/6 Md(2mt+md)
 α et β sont des rapports	$1/3\ M^2$	$\frac{M}{6}\left[-2m_o\left(1+\alpha+\alpha^2\right)+\left(4m_o-m_g+m_d\right)\left(1+\alpha\right)+3m_g\right]$
	$1/3\ M^2$	1/24 M(mg+10mt+md)
	$1/5\ M_g^2$	1/60 Mg[5(3mg+md)+12mo]
	$1/5\ M_d^2$	1/60 Md[5(mg+3md)+12mo]
	$8/15\ M^2$	1/15 M[5(mg+md)+8mo]
	$8/15\ M_g^2$	1/60 Mg[5(5mg+3md)+28mo] ou 1/60 Mg(11mg+md+28mt)

3.9. La procédure de la méthode des forces :

Les différentes étapes de calcul par la méthode des forces sont les suivantes :

- Déterminer le degré d'hyperstaticité $d = n$
- Ecrire les n équations canoniques.
- Choisir le système de base (système isostatique le plus simple)
- Tracer le diagramme des moments fléchissants M_0 du système isostatique due aux charges extérieures ($X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$)
- Tracer les diagrammes ou épures unitaires m_i $(i = 1, \dots, n)$ correspondant au système isostatique sans charges extérieures et avec X_i=1 et les autres inconnus nuls.
- On calcul tous les coefficients δ_{ij} et δ_{i0} à l'aide des diagrammes.
- Résolution du système d'équations canoniques

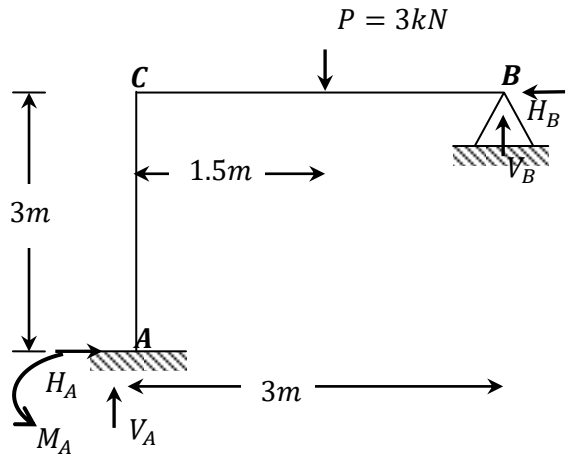
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots + \delta_{1n}X_n + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots + \delta_{2n}X_n + \delta_{20} = 0 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots + \delta_{nn}X_n + \delta_{n0} = 0 \end{cases}$$

- Correction des épures unitaires $m_i^* = m_i X_i$ $(i = 1, \dots, n)$.
  $m_1^* = m_1 X_1$; $m_2^* = m_2 X_2$; …. ; $m_n^* = m_n X_n$
- On fait la somme des épures unitaires corrigées $\sum m_i^* = m_1^* + m_2^* + \cdots + m_n^*$
- En dernier, on obtient le diagramme des moments fléchissants final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants
  $M_{final} = M_0 + \sum m_i^*$

3.10. Exercices

3.10.1. Exercice N°3.1 :

Un portique ACB constitué de poutre et de poteau de rigidité EI en flexion. Tracer les diagrammes des moments fléchissants M_f, des efforts tranchants T et des efforts normaux N.



- On détermine le degré d'hyperstaticité d (le nombre d'inconnus)

$$d = 3c - a - 2s$$

- c : le nombre de contours de la structure $(c = 1)$
- a : le nombre d'appuis doubles $(a = 1)$
- s : le nombre d'appuis simples $(s = 0)$

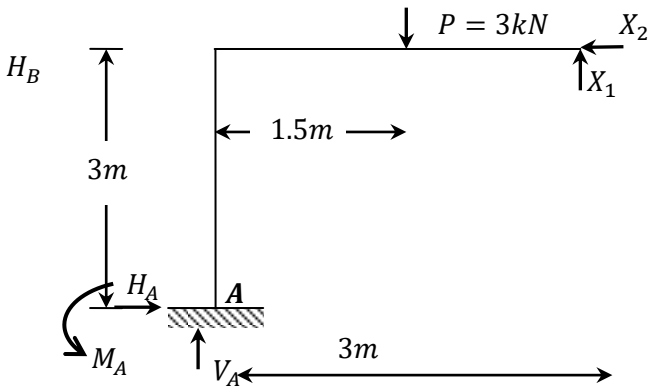
$\Big\} d = 2$

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0 \end{cases}$$

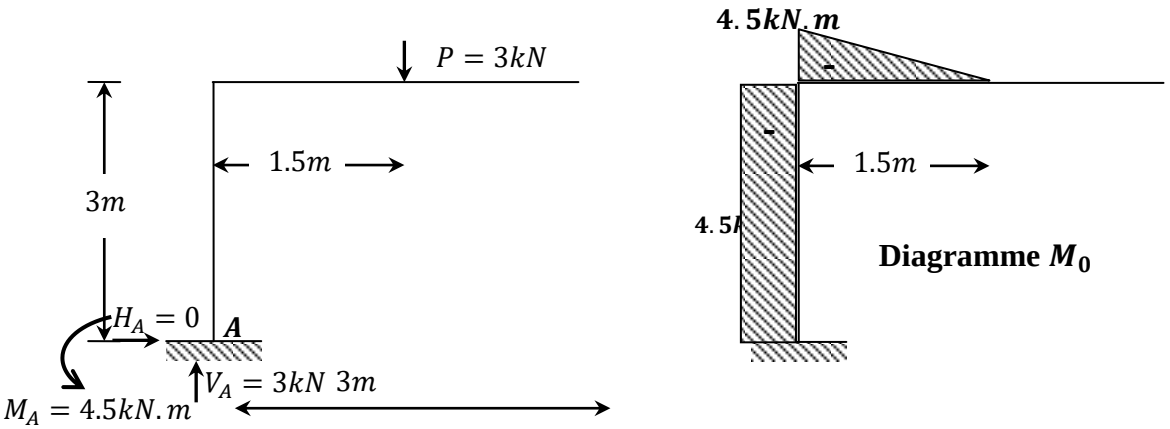
- Choix du système de base (fondamental)

  La structure initiale (hyperstatique) est transformée en une structure isostatique soumise aux charges extérieures de départ $(P = 3kN)$ et aux deux forces inconnues (X_1 et X_2) .

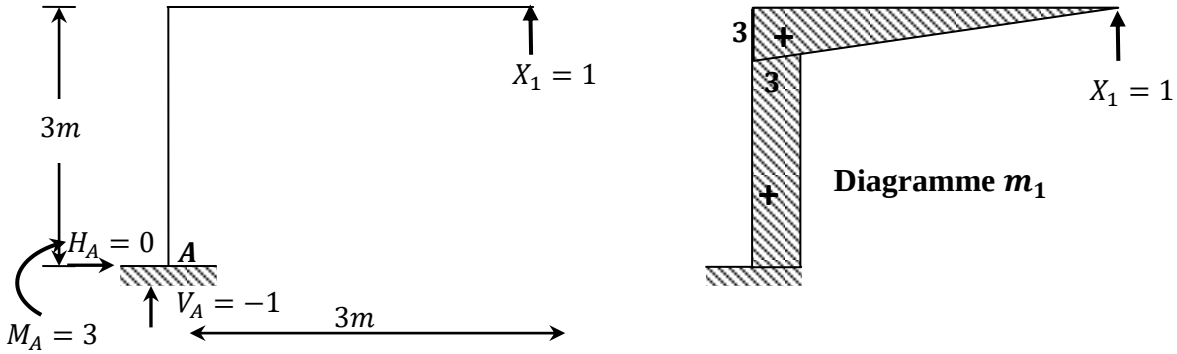


- On Trace les diagrammes unitaires (m_1; m_2) et celui des charges extérieures (M_0)

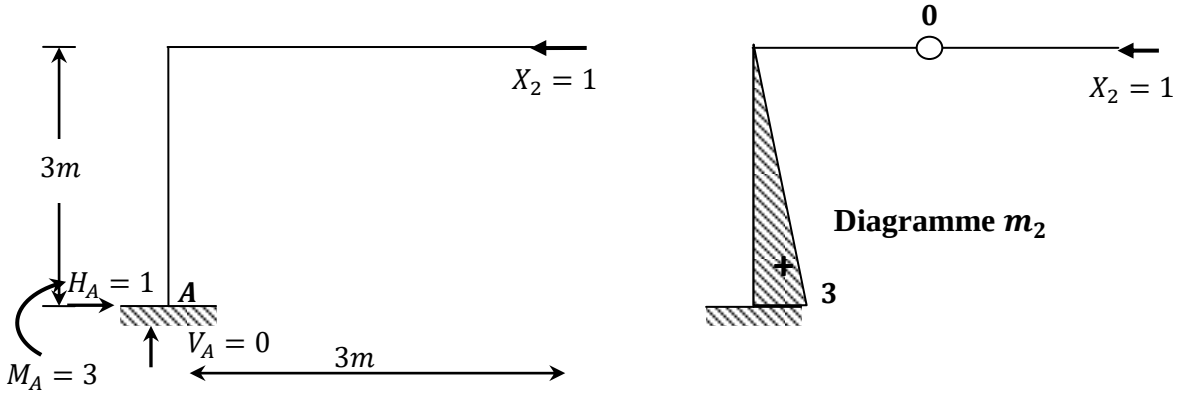
- **Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = X_2 = 0$**



- **Etat 1 : Charges extérieures $= 0$, $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$**



- **Etat 2 : Charges extérieures $= 0$, $X_1 = 1$ et $X_2 = 0$**



- Calculer des déplacements δ_{ij}.

  $\delta_{ij} = \frac{1}{EI}\int_0^l m_i m_j dx$ (Méthode de VERETCHAGUINE)

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} = 0$$

  - Les coefficients δ_{11} et δ_{21} sont obtenus en appliquant au système de base la sollicitation unitaire $X_1 = 1$.
  - Les coefficients δ_{12} et δ_{22} sont obtenus en appliquant au système de base la sollicitation unitaire $X_2 = 1$.
  - Les coefficients δ_{10} et δ_{20} se calculent sous l'effet des charges extérieures (ici la force P=3kN) appliquées au système de isostatique de base.
  - Les diagrammes (m_1; m_2 et M_0) servirons au calcul de ces coefficients.

  On trouve,

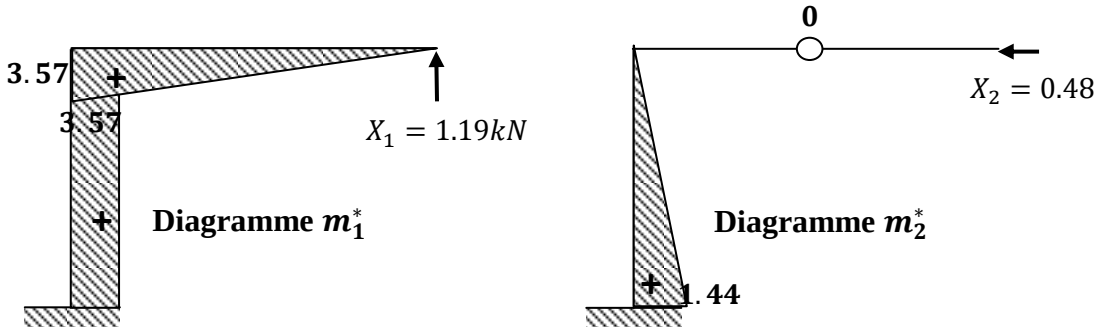
$$\delta_{11} = \frac{36}{EI}, \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{13.5}{EI}, \qquad \delta_{22} = \frac{9}{EI}$$
$$\delta_{10} = -\frac{48.94}{EI} \qquad et \qquad \delta_{20} = -\frac{20.25}{EI}$$

$$\begin{cases} \frac{36}{EI}X_1 + \frac{13.5}{EI}X_2 - \frac{48.94}{EI} = 0 \\ \frac{13.5}{EI}X_1 + \frac{9}{EI}X_2 - \frac{20.25}{EI} = 0 \end{cases}$$

  A partir du système, on trouve :

$$\begin{cases} X_1 = 1.19kN \\ X_2 = 0.48kN \end{cases}$$

- Correction des épures unitaires
  - **Le diagramme corrigé $\boldsymbol{m_1^* = m_1 X_1}$**
  - **Le diagramme corrigé $\boldsymbol{m_2^* = m_2 X_2}$**



- Le diagramme final des moments fléchissants :

$$M_f = M_0 + m_1^* + m_2^*$$

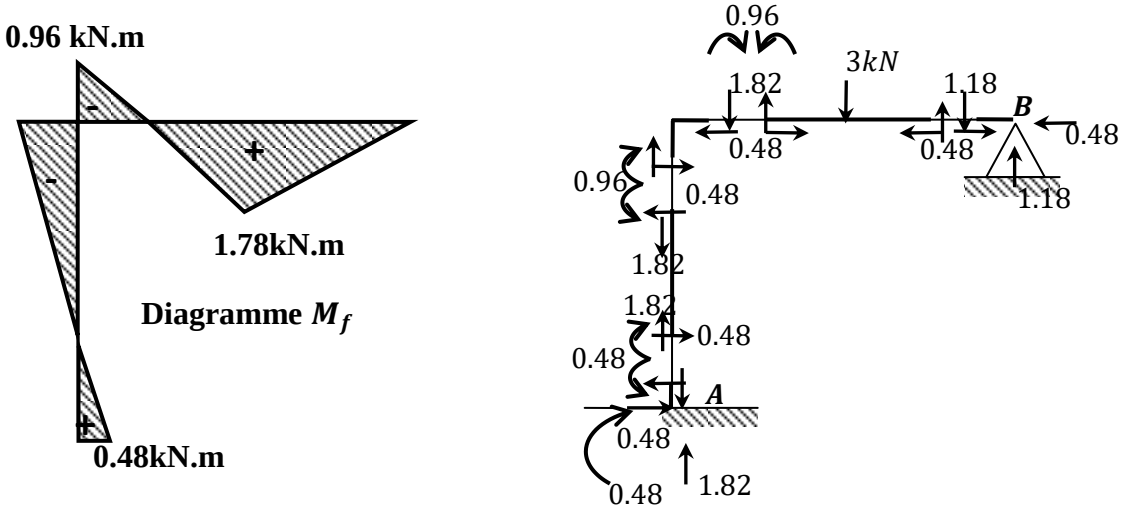


Diagramme de l'effort tranchant

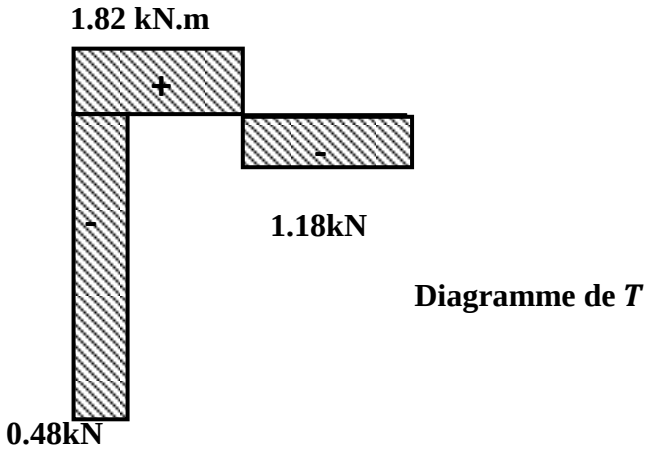
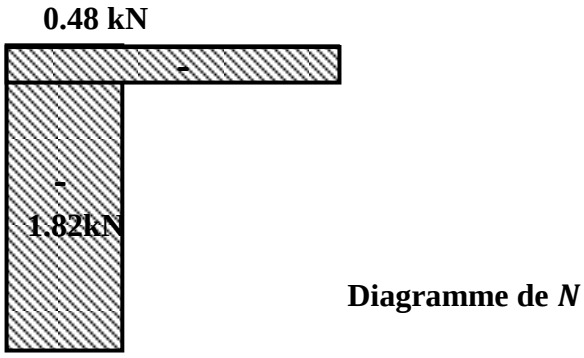


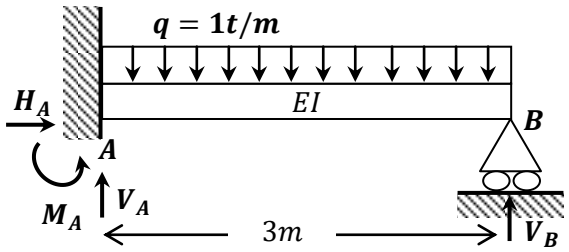
Diagramme de l'effort normal



3.10.2. Exercice N°3.2 :

On étudie la poutre représentée sur la figure suivante. Celle-ci est encastrée en A, repose sur un appui simple en B et soumise à une charge uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre. La rigidité EI est constante.

On demande de tracer le diagramme des moments fléchissants.



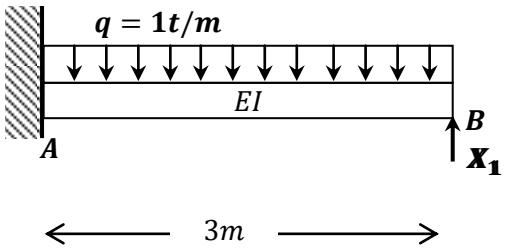
- On détermine le degré d'hyperstaticité d

$$d = 4(liaisons) - 3(équations) = 1$$

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0$$

- Choix du système de base (fondamental)



- On Trace l'épure unitaire (diagramme) (m_1) et celui des charges extérieures (M_0)

- **Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $X_1 = 0$**

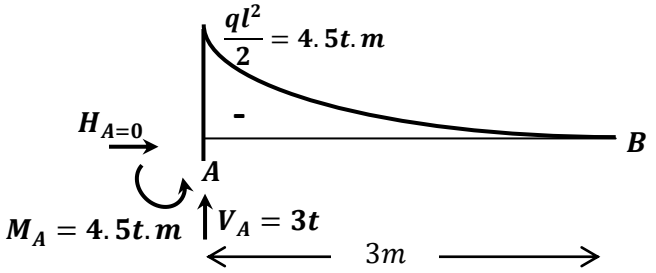


Diagramme M_0

- **Etat 1 : Charges extérieures =0 et $X_1 = 1$**

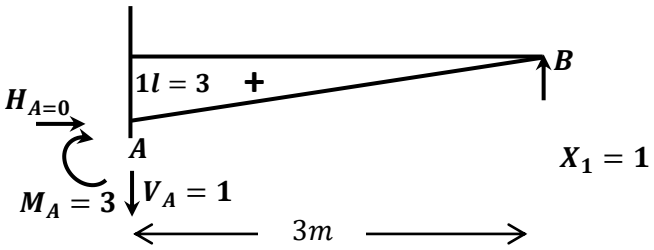


Diagramme m_1

- Calculer les déplacements δ_{ij}.

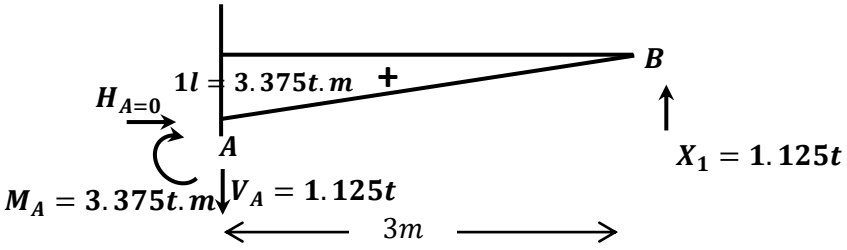
$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI} = \frac{9}{EI}, \qquad \delta_{10} = -\frac{ql^4}{8EI} = -\frac{10.125}{EI}$$

$$\frac{9}{EI}X_1 - \frac{10.125}{EI} = 0$$

A partir de cette équation, on tire : $X_1 = 1.125t$

- Correction de l'épure unitaire :

Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 X_1$



- On Trace le diagramme final des moments fléchissants de l'état réel par superposition de l'épure unitaire m_1^* avec le diagramme M_0.

$$M_f = M_0 + m_1^*$$

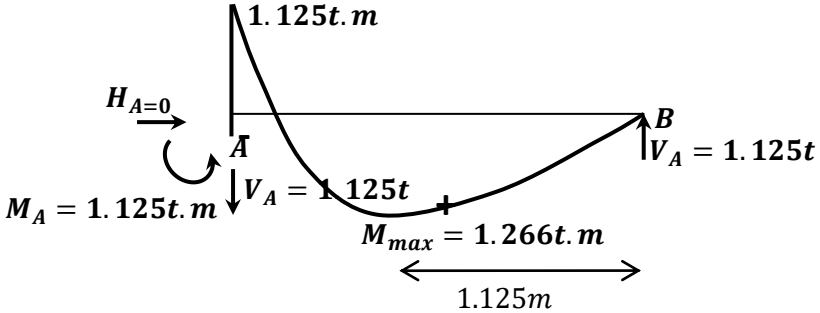
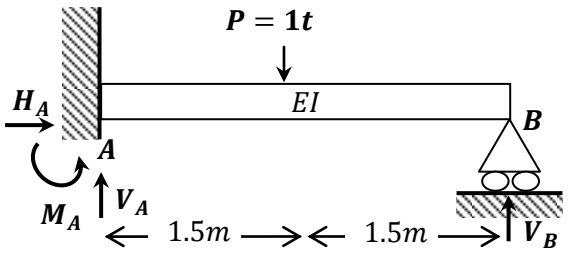


Diagramme M_f

3.10.3. Exercice N° 3.3 :

On étudie la poutre représentée sur la figure suivante. Celle-ci est encastrée en A, repose sur un appui simple en B, est soumise à une charge constante de 1t. EI est constante.

On demande de tracer le diagramme des moments fléchissants et de l'effort tranchant.

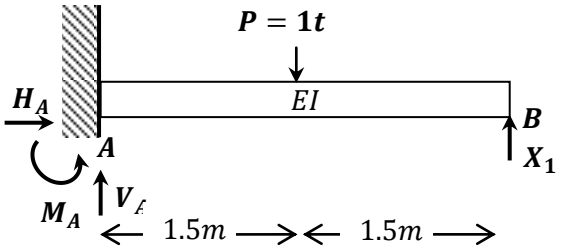


- On détermine le degré d'hyperstaticité d (le nombre d'inconnus)
  $d = 4(liaisons) - 3(équations) = 1$

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\delta_{11}^{u} X_1 + \delta_{10} = 0$$

- Choix du système de base (fondamental)



- On Trace le diagramme unitaire (m_1) et celui des charges extérieures (M_0)

  - **Etat 0 : Charges extérieures ≠ 0 et $X_1 = 0$**

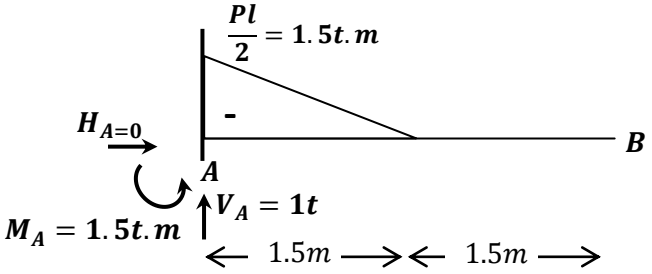


Diagramme M_0

- **Etat 1 : Charges extérieures =0 et $X_1 = 1$**

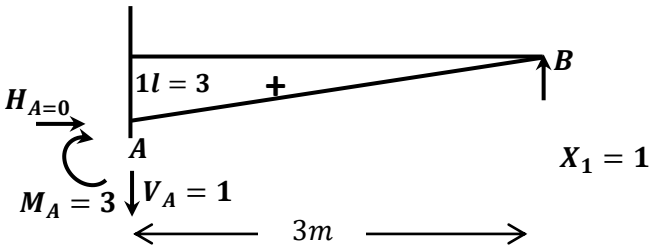


Diagramme m_1

- Calculer les déplacements δ_{ij}.

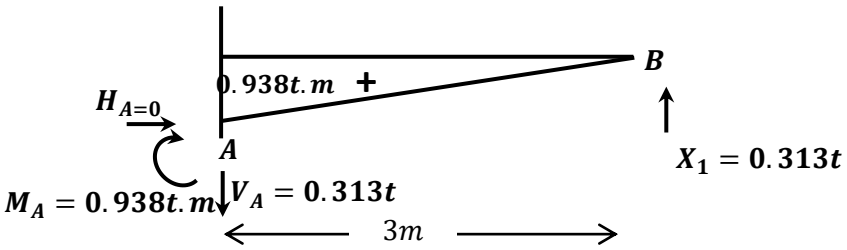
$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI} = \frac{9}{EI}, \qquad \delta_{10} = -\frac{5Pl^3}{48EI} = -\frac{2.813}{EI}$$

$$\frac{9}{EI}X_1 - \frac{2.813}{EI} = 0$$

A partir de cette équation, on tire : $X_1 = 0.313t$

- Correction de diagramme unitaire :

Le diagramme corrigé $m_1 *= m_1 X_1$



- On Trace le diagramme final des moments fléchissants :

$$M_f = M_0 + m_1^*$$

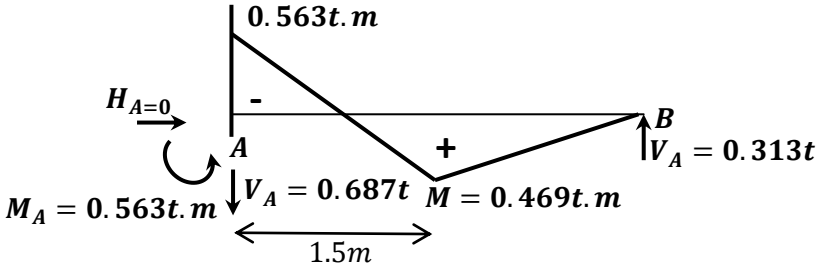
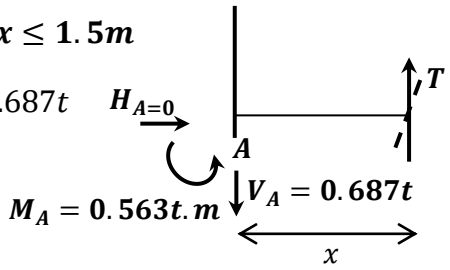


Diagramme des M_f

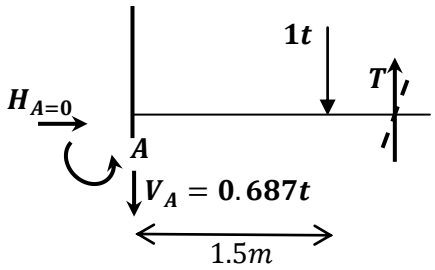
Section 1-1 $\mathbf{0 \leq x \leq 1.5m}$

$\sum F_V = 0 \Rightarrow T = 0.687t$



Section 1-1 $\mathbf{1.5 \leq x \leq 3m}$

$\sum F_V = 0 \Rightarrow T = 0.687 - 1 = 0.313t$



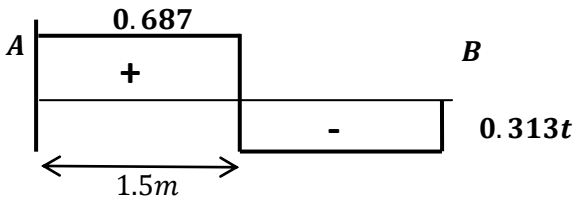
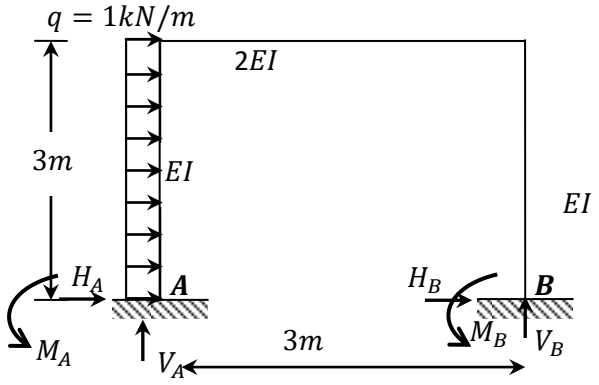


Diagramme de *T*

3.10.4. Exercice N°3.4 :

Un portique constitué de deux poteaux et une poutre. Tracer le diagramme des moments fléchissants.



- On détermine le degré d'hyperstaticité d

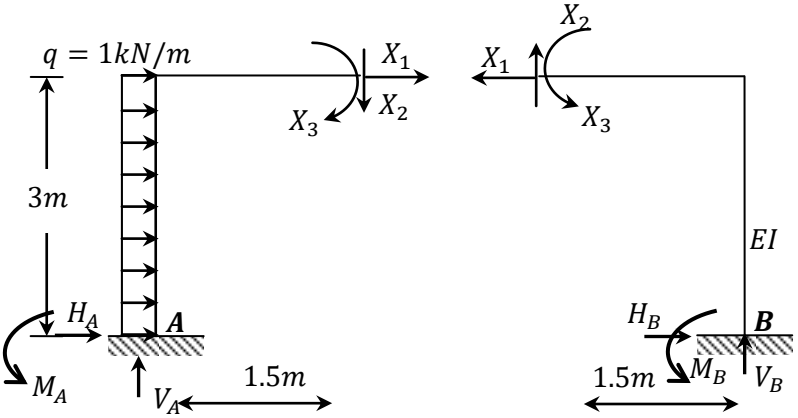
$$d = 3c - a - 2s = 3.1 - 0 - 2.0 = 3$$

$\Rightarrow$ **3 inconnues hyperstatiques** $(\boldsymbol{X_1, X_2\ et\ X_3})$

- On écrit le système d'équations canoniques :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{20} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{30} = 0 \end{cases}$$

- Choix du système de base (fondamental)
  Les inconnus $X_1, X_2\ et\ X_3$ représente les efforts internes au milieu de la poutre du cadre.



- On Trace les diagrammes unitaires $(m_1;\ m_2;\ m_3)$ et celui des charges extérieures (M_0)
  - **Etat 0 : Charges extérieures $\neq$ 0 et $\boldsymbol{X_1 = X_2 = X_3 = 0}$**

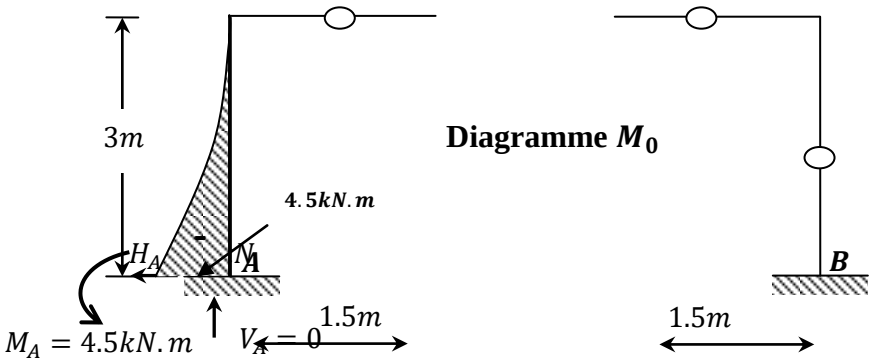


Diagramme M_0

- **Etat 1 : Charges extérieures $= 0$, $X_1 = 1$, $X_2 = 0$ et $X_3 = 0$**

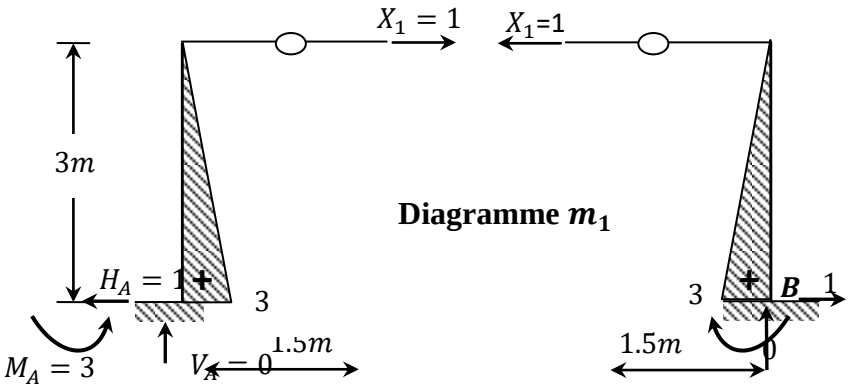


Diagramme m_1

- **Etat 2 : Charges extérieures $= 0$, $X_1 = 0$, $X_2 = 1$ et $X_3 = 0$**

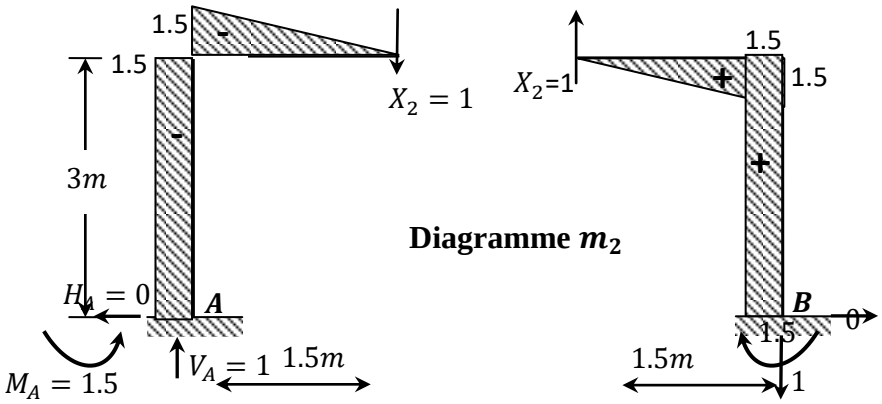


Diagramme m_2

- **Etat 3 : Charges extérieures $= 0$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ et $X_3 = 1$**

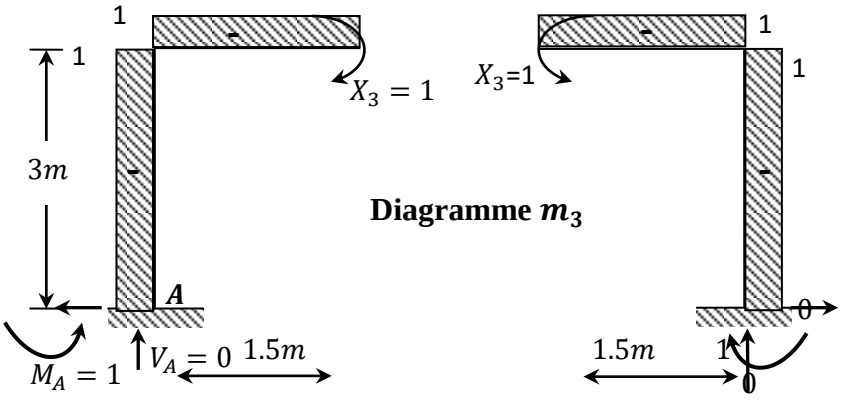


Diagramme m_3

- Calculer les déplacements δ_{ij}.

$$\delta_{11} = \frac{18}{EI}, \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0, \qquad \delta_{22} = \frac{14.63}{EI}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{9}{EI}, \qquad \delta_{33} = \frac{7.5}{EI}$$

$$\delta_{10} = -\frac{10.13}{EI}, \qquad \delta_{20} = \frac{6.75}{EI} \qquad et \qquad \delta_{30} = \frac{13.5}{EI}$$

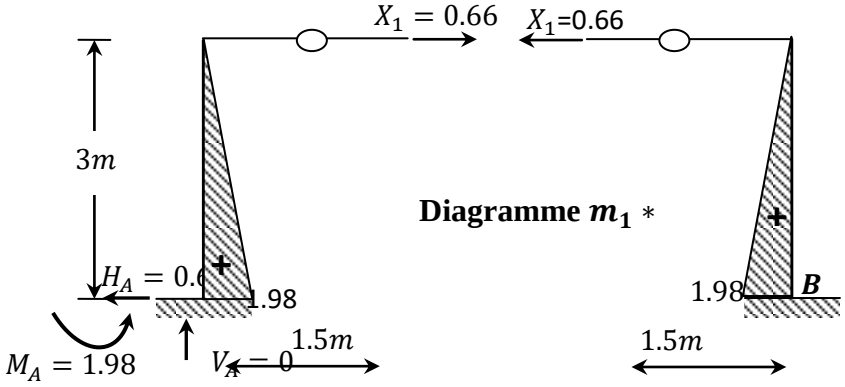
- Le système d'équations canoniques :

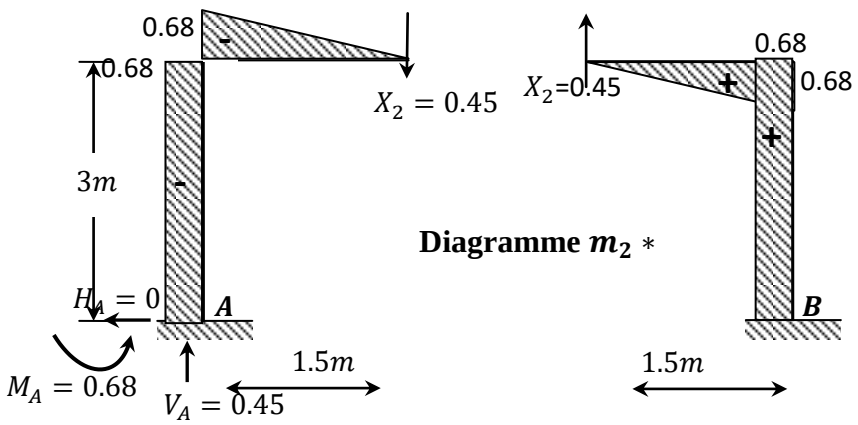
$$\begin{cases} \frac{18}{EI}X_1 + 0.X_2 + -\frac{9}{EI}X_3 - \frac{10.13}{EI} = 0 \\ 0.X_1 + \frac{14.63}{EI}X_2 + 0.X_3 + \frac{6.75}{EI} = 0 \\ -\frac{9}{EI}X_1 + 0.X_2 + \frac{7.5}{EI}X_3 + \frac{13.5}{EI} = 0 \end{cases}$$

La résolution du système donne :

$$\begin{cases} X_1 = 0.66kN \\ X_2 = 0.45kN \\ X_3 = -0.18kN.m \end{cases}$$

- Correction des épures unitaires
  - **Le diagramme corrigé $m_1^* = m_1 X_1$**
  - **Le diagramme corrigé $m_2^* = m_2 X_2$**
  - **Le diagramme corrigé $m_3^* = m_3 X_3$**





•

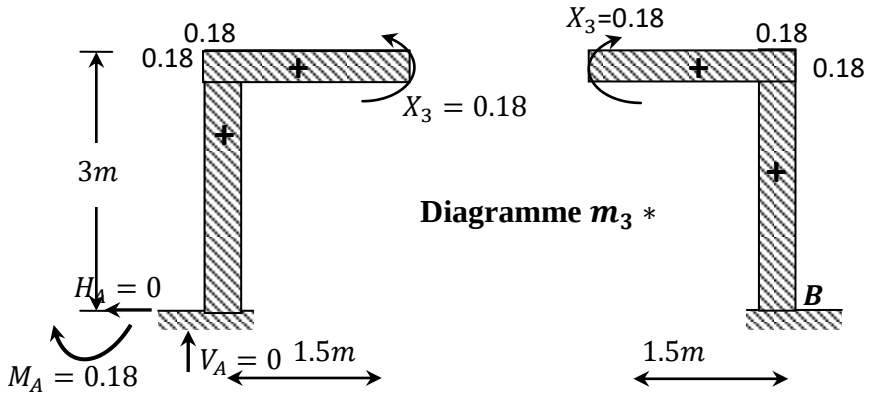


Diagramme m_3 *

- Donc le diagramme final du système réel :

$$M_f = M_0 + m_1^* + m_2^* + m_3^*$$

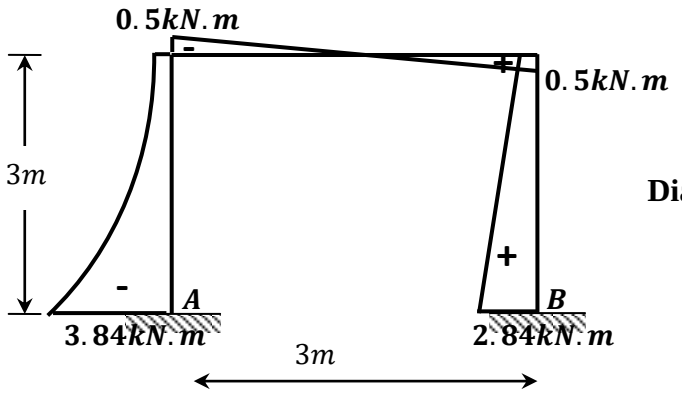


Diagramme de M_f